PHẦN 1

TOÁN CƠ SỞ CHO KINH TẾ

1. Đạo hàm của hàm một biến và áp dụng để phân tích tối ưu trong Kinh tế

1.1. Vài quy tắc tính đạo hàm, bảng đạo hàm của một vài hàm số sơ cấp cơ bản và đạo hàm của hàm hợp

a) Vài quy tắc tính đạo hàm

$(u + v)' = u' + v'$; $(u - v)' = u' - v'$; $(ku)' = ku'$ (k là hằng số)

$(uv)' = u'v + uv'$

b) Bảng đạo hàm của một vài hàm số sơ cấp cơ bản

c)

Hàm số		**Đạo hàm**
Hàm hằng	$y = C$	$y' = 0$
Hàm lũy thừa	$y = x^{\alpha}$	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$
Hàm mũ	$y = a^x (0 < a \neq 1)$	$y' = a^x \ln a$
Đặc biệt	$y = e^x$	$y' = e^x$

d) Đạo hàm của hàm hợp: Nếu $u = u(x)$ là một hàm số thì ta có

$$(e^u)' = e^u u'; \qquad (a^u)' = a^u u' \ln a \ (0 < a \neq 1)$$

1.2. Ứng dụng đạo hàm để tìm cực trị của hàm 1 biến

a) Khái niệm cực trị: Cho hàm số f xác định trên D; x_0 là điểm thuộc D.

- Ta bảo f đạt cực tiểu (địa phương) tại x_0 nếu $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in D$ và đủ gần x_0. Lúc đó $f(x_0)$ cũng gọi là giá trị cực tiểu của f.
- Ta bảo f đạt cực đại (địa phương) tại x_0 nếu $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in D$ và đủ gần x_0. Lúc đó $f(x_0)$ cũng gọi là giá trị cực đại của f.
- Khi f đạt cực tiểu hay cực đại tại x_0 ta cũng nói f đạt cực trị tại x_0 và $f(x_0)$ là giá trị cực trị của f.
- *Nếu $m = f(x_0) \leq f(x), \forall x \in D$, thì ta bảo f đạt giá trị nhỏ nhất (hay cực tiểu toàn cục) trên D tại x_0 và gọi $m = f(x_0)$ là giá trị nhỏ nhất của f trên D, ký hiệu $m = \underset{x \in D}{Min}\, f(x)$.*
- *Nếu $M = f(x_0) \geq f(x), \forall x \in D$, thì ta bảo f đạt giá trị lớn nhất (hay cực đại toàn cục) trên D tại x_0 và gọi $M = f(x_0)$ là giá trị lớn nhất của f trên D, ký hiệu $M = \underset{x \in D}{Max}\, f(x)$.*
- *Cực tiểu toàn cục, cực đại toàn cục của f còn gọi là cực trị toàn cục hay cực trị tuyệt đối của f trên D.*

b) Cách tìm cực trị (địa phương)

Bài toán: Cho hàm số y = f(x). Tìm cực trị của y (nếu có).

Thuật toán tìm cực trị: Ta thực hiện tuần tự các bước dưới đây.

- **Bước 1**: Nêu tập xác định và tính các đạo hàm y' và y" = (y')'.
- **Bước 2**: Giải phương trình y' = 0 tìm các nghiệm (nếu có)
  + Nếu y' vô nghiệm thì kết luận hàm số không có cực trị. Thuật toán dừng.
  + Nếu y' có nghiệm, chẳng hạn x_1, x_2, … thì đó là những điểm dừng, tức là những điểm khả nghi có cực trị. Làm tiếp bước 3.
- **Bước 3**: Kiểm tra điều kiện có cực trị tại từng điểm dừng.
  Chẳng hạn, xét điểm dừng x = a nào đó.
  Tính y"(a).
  - Khi y"(a) > 0 thì x = a là điểm cực tiểu.
  - Khi y"(a) < 0 thì x = a là điểm cực đại.
  - Khi y"(a) = 0 đồng thời y" xác định trong khoảng (a – ε, a + ε) với ε > 0 (đủ nhỏ) và y" đổi dấu khi x chạy qua a từ trái sang phải thì x = a không là điểm cực trị.

Bước 4: Tóm tắt và kết luận về cực trị của hàm số đã cho.

c) Cách tìm cực trị tuyệt đối

***Bài toán**: Cho hàm số y = f(x) xác định và liên tục trên đoạn một [a, b] (– ∞ < a < b < +∞) bất kỳ, khả vi trên khoảng (a, b). Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất (tức là cực trị tuyệt đối) của f trên đoạn đó.*

***Thuật toán tìm cực trị tuyệt đối**: Ta thực hiện tuần tự các bước dưới đây.*

- ***Bước 1**: Tính đạo hàm y' = f'(x), x ∈ (a, b).*
- ***Bước 2**: Giải phương trình y' = 0 tìm các nghiệm x_1, x_2, … trên (a, b) (nếu có).*
- ***Bước 3**: Tính các giá trị f(a), f(b) và các giá trị $f(x_1)$, $f(x_2)$, … của f tại các điểm x_1, x_2, … nếu tìm được chúng ở bước 2.*

***Bước 4**: Giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của tập {f(a), f(b), $f(x_0)$, $f(x_1)$, …} chính là giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của f trên đoạn [a, b].*

d) Ví dụ 1: Tìm cực trị của hàm $y = x^3 – 6x^2 + 9x + 10$.

e) Ví dụ 2: Tìm cực trị của hàm $y = x^4 – 18x^2 + 5$.

1.3. Áp dụng để phân tích tối ưu trong Kinh tế

a) Vài hàm thông dụng trong Kinh tế

- Giá (Price): P (hay p); Lao động (Labor): L, Vốn (Capital): K.
- Hàm cung (Quantity Supplied): Q_s.
- Hàm cầu (Quantity Demanded): Q_d.
- Hàm lợi ích (Utility): U.
- Hàm (tổng) chi phí (Total Cost): TC (hoặc C).
- Hàm (tổng) doanh thu (Total Revenue): TR (hoặc R).
- Hàm lợi nhuận (Profit) π = TR – TC (hoặc R – C).

b) Lựa chọn tối ưu trong Kinh tế

Nhiều vấn đề kinh tế được đưa về bài toán tìm cực trị của hàm số y = f(x) nào đó.

Cụ thể, trong Kinh tế, ta thường phải giải quyết các bài toán tối ưu dưới đây.

- Tìm giá P để tối ưu hóa sản lượng Q, tức là làm cho Q cực đại (tối đa).
- Tìm giá P hoặc tìm sản lượng Q để tối ưu hóa doanh thu R, tức là làm R cực đại (tối đa).
- Tìm sản lượng Q để tối ưu hóa chi phí C (hay TC), tức là làm C cực tiểu (tối thiểu).

Đương nhiên, trước hết, ta cần chuyển vấn đề tối ưu mang nội dung kinh tế thành bài toán cực trị thuần túy toán học. Tiếp theo, ta giải bài toán cực trị trong Toán học. Rồi sau đó lại diễn giải kết quả toán học thành kết luận về vấn đề gốc trong Kinh tế. Mặt khác, từ các kiến thức toán học trong bài toán tìm cực trị, ta có thể suy ra một số khẳng định mang nội dung kinh tế.

c) Ví dụ 3: Cho hàm cầu $Q = 300 - P$, hàm chi phí $C = Q^3 - 19Q^2 + 333Q + 10$. Tìm sản lượng Q làm tối ưu hóa lợi nhuận.

Giải

Vì ta cần tìm sản lượng Q nên trước hết ta biểu diễn giá theo sản lượng. Ta có

$$(Q = 300 - P) \Leftrightarrow (P = 300 - Q);\ 0 \le Q \le 300.$$

Từ đó suy ra

- Doanh thu $R = PQ = (300 - Q)Q$.
- Lợi nhuận $\pi = R - C = (300 - Q)Q - (Q^3 - 19Q^2 + 333Q + 10)$

  Tính toán rút gọn ta được lợi nhuận $\pi = -Q^3 + 18Q^2 - 33Q - 10$.

  Vấn đề của Kinh tế được chuyển thành bài toán đơn giản trong Toán học: tìm mức sản lượng Q (> 0) để lợi nhuận $\pi = -Q^3 + 18Q^2 - 33Q - 10$ lớn nhất.
- $\pi' = -3Q^2 + 36Q - 33 = -3(Q^2 - 12Q + 11)$; $\pi'' = -6Q + 36 = -6(Q - 6)$.
- $\pi' = 0 \Leftrightarrow [(Q = 1) \text{ v } (Q = 11)]$.
- $\pi''(1) = 30 > 0$ nên π đạt cực tiểu (Loại).
- $\pi''(11) = -30 < 0$ nên π đạt cực đại tại Q = 11, lúc đó $\pi_{max} = \pi(11) = 474$.

Kết luận: Với Q = 11 thì lợi nhuận lớn nhất $\pi_{max} = \pi(11) = 474$ (đơn vị tiền).

d) Ví dụ 4: Giả sử một doanh nghiệp sản xuất và tiêu thụ độc quyền một loại sản phẩm có hàm cầu cho bởi $P = 1400 - 7{,}5Q$ (đơn vị tính USD) với $Q = Q_d$ là lượng cầu (tính bằng số lượng sản phẩm). Cho biết chi phí bình quân là $AC = Q^2 - 6Q + 140 + 750Q^{-1}$; Q > 0. Tìm mức sản lượng tối ưu hóa lợi nhuận và xác định giá tương ứng.

Giải

Chi phí là $C = Q.AC = Q(Q^2 - 6Q + 140 + 750Q^{-1}) = Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 750$.

Doanh thu là $R = PQ = (1400 - 7{,}5Q)Q = 1400Q - 7{,}5Q^2$.

Lợi nhuận $\pi = R - C = (1400Q - 7{,}5Q^2) - (Q^3 - 6Q^2 + 140Q + 750)$

Hay lợi nhuận là $\pi = -Q^3 - 1{,}5Q^2 + 1260Q - 750$; Q > 0.

Ta cần tìm mức sản lượng tối ưu hóa lợi nhuận tức là tìm Q để π lớn nhất.

Ta có $M\pi = \pi' = -3Q^2 - 3Q + 1260 = -3(Q^2 + Q - 420)$.

$\pi'' = -6Q - 3 = -3(2Q + 1) < 0;\ \forall Q > 0.$

$M\pi = 0 \Leftrightarrow -3Q^2 - 3Q + 1260 = 0 \Leftrightarrow$ [Q = 20 (nhận) hoặc Q = – 21 (loại)].

Tại Q = 20 ta có:

$P = 1400 - 7{,}5\times 20 = 1250;\quad \pi(20) = -20^3 - 1{,}5\times 20^2 + 1260\times 20 - 750 = 15850.$

Vì $\pi''(Q) < 0$ ($\forall Q > 0$) nên π đạt cực đại tại Q = 20 với $\pi_{max} = 15850$.

Rõ ràng Q = 20 còn là điểm cực đại duy nhất của π trên khoảng $(0, +\infty)$. Hơn nữa còn có

- $\pi' = -3(Q^2 + Q - 420) < 0,\ \forall Q > 20$, *nên π giảm trên $(20, +\infty)$, nói riêng* $\pi_{max} = 15850 > \pi(Q),\ \forall Q > 20.$
- $\pi' = -3(Q^2 + Q - 420) > 0,\ \forall Q \in (0, 20)$, *nên π tăng trên (0, 20), nói riêng* $\pi_{max} = 15850 > \pi(Q),\ \forall Q \in (0, 20).$

Bởi thế, giá trị cực đại $\pi_{max} = 15850$ cũng là giá trị lớn nhất của π.

Kết luận: Với sản lượng cầu Q = 20, giá tương ứng P = 1250 (USD) thì lợi nhuận tối ưu bằng $\pi_{max} = 15850$ (USD).

BÀI TẬP

1.1. Giả sử một doanh nghiệp sản xuất và tiêu thụ độc quyền một loại sản phẩm có hàm cầu cho bởi P = 2800 – 15Q (đơn vị tính USD) với $Q = Q_d$ là lượng cầu (tính bằng số lượng sản phẩm). Cho biết chi phí bình quân là

$$AC = 2Q^2 - 12Q + 280 + 1500Q^{-1};\ Q > 0.$$

a) Xác định doanh thu và lợi nhuận.

b) Tìm mức sản lượng tối ưu hóa lợi nhuận và xác định giá tương ứng.

1.2. Giả sử doanh thu của một loại sản phẩm cho bởi công thức $R = 240Q + 57Q^2 - Q^3$, Q là lượng hàng hóa bán ra. Tìm sản lượng Q để tối ưu hóa doanh thu và tính doanh thu lúc đó.

1.3. Hàm cầu và chi phí bình quân của một loại sản phẩm độc quyền được cho bởi P = 600 – 2Q, $AC = 0{,}2Q + 28 + 200Q^{-1}$ (Q là sản lượng cầu, P là giá bán một sản phẩm).

a) Tìm sản lượng Q để tối ưu hóa lợi nhuận (trước thuế). Tìm giá P và lợi nhuận lúc đó.

b) Giả sử mức thuế trên một đơn vị sản phẩm này là 22 (USD). Tìm sản lượng để tối ưu hóa lợi nhuận sau thuế và xác định mức giá và lợi nhuận (sau thuế) lúc đó.

1.4. Một doanh nghiệp sản xuất trong điều kiện cạnh tranh hoàn hảo. Giả sử giá trên thị trường của sản phẩm mà doanh nghiệp sản xuất là P = 130$ và tổng chi phí để sản xuất ra Q sản phẩm là $C(Q) = Q^3 - 3Q^2 + 30Q + 60$. Hãy tìm mức sản lượng Q để lợi nhuận của doanh nghiệp đạt cực đại.

1.5. Một xí nghiệp độc quyền sản xuất và tiêu thụ một loại sản phẩm. Giả sử hàm cầu của loại sản phẩm này là Q = 48 – P và hàm chi tổng phí sản xuất ứng là $C = C(Q) = 20 + 6Q + Q^2$, trong đó Q là số lượng sản phẩm được sản xuất và P là mức giá của mỗi sản phẩm được bán ra. Hãy tính mức lợi nhuận tối đa mà xí nghiệp có thể thu được biết rằng mỗi sản phẩm bán ra, xí nghiệp phải chịu thêm mức thuế là 2$.

2. Hàm hai biến, các đạo hàm riêng và áp dụng để phân tích tối ưu trong Kinh tế

2.1. Hàm hai biến và các đạo hàm riêng cấp 1, 2 của chúng

a) Mô tả khái niệm hàm hai biến: Một biểu thức chứa hai biến x, y cho ta một hàm hai biến x, y. Ta thường ký hiệu z = f(x, y).

Ví dụ 5

$z = x^3 - 3x^2y + 4xy^2 + y^3$; $z = Ax^\alpha y^\beta$ (A, α, β là các hằng số dương đã cho)

b) Các đạo hàm riêng cấp 1, 2

Vì tính giản lược, ta bỏ qua không nhắc lại khái niệm đạo hàm riêng (ĐHR), tính khả vi lớp C^k, khả vi liên tục. Ta thừa nhận mỗi hàm hai biến z = f(x, y) khả vi lớp C^2 sẽ có hai ĐHR cấp 1 và ba ĐHR cấp 2 ký hiệu z'_x, z'_y; z''_{xx}, z''_{xy} và z''_{yy}.

Cách tính các ĐHR: **Khi tính ĐHR theo biến này thì xem biến kia là hằng số và áp dụng mọi quy tắc tính đạo hàm 1 biến thông thường**.

c) Ví dụ 6: Tính các ĐHR của các hàm cho trong ví dụ 5 nêu trên.

2.2. Áp dụng ĐHR để tìm cực trị tự do của hàm 2 biến và phân tích tối ưu trong Kinh tế

a) Khái niệm về cực trị tự do của hàm hai biến

Xét hàm hai biến bất kỳ z = f(x, y) xác định trên miền phẳng D và (x_0, y_0) là một điểm thuộc D.

- Ta nói hàm số z = f(x, y) *đạt cực tiểu tự do (địa phương)* hay đơn giản là z *đạt cực tiểu* tại (x_0, y_0) nếu $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ với mọi điểm (x, y) thuộc D và nằm trong một lân cận của (x_0, y_0). Lúc đó, ta cũng nói (x_0, y_0) là một *điểm cực tiểu* và $z_0 = f(x_0, y_0)$ gọi là một *giá trị cực tiểu* của hàm số đang xét.
- Ta nói hàm z = f(x, y) *đạt cực đại tự do (địa phương)* hay đơn giản là z *đạt cực đại* tại (x_0, y_0) nếu $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ với mọi điểm (x, y) thuộc D và nằm trong một lân cận của (x_0, y_0). Lúc đó, ta cũng nói (x_0, y_0) là một *điểm cực đại* và $z_0 = f(x_0, y_0)$ gọi là một *giá trị cực đại* của hàm số đang xét.

Các điểm cực tiểu hay cực đại còn gọi chung là *điểm cực trị*, các giá trị cực tiểu hay cực đại còn gọi chung là *giá trị cực trị* của hàm đang xét. Hàm số đạt cực tiểu hay cực đại cũng gọi chung là *đạt cực trị*.

b) Thuật toán tìm cực trị tự do của hàm hai biến

Bài toán cơ bản: Cho hàm hai biến z = f(x, y) xác định và khả vi liên tục đến cấp 2 trên miền phẳng D. Tìm cực trị (tự do) của z = f(x, y) nếu có.

Chú ý: Trong thực hành, đôi khi miền xác định D không được cho trực tiếp mà ta cần tìm theo sự có nghĩa của biểu thức xác định z = f(x, y).

Thuật toán tìm cực trị tự do: Để tìm cực trị của hàm z = f(x, y) ta thực hiện các bước dưới đây.

- **Bước 1**: Tìm tập xác định D (nếu cần) rồi tính các đạo hàm riêng cấp một, cấp hai của hàm số đã cho.
- **Bước 2**: Giải hệ phương trình $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ để tìm các điểm dừng (nếu có).
  - Nếu hệ vô nghiệm thì dừng lại, kết luận hàm số *không có cực trị*.
  - Nếu hệ có nghiệm thì mỗi nghiệm cho ta một điểm dừng. Làm tiếp bước 3.
- **Bước 3**: Kiểm tra điều kiện có cực trị tại từng điểm dừng.

  Chẳng hạn, xét điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$. Ta tính A, B, C, Δ như dưới đây

  $A = z''_{x^2}(x_0, y_0)$, $B = z''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = z''_{y^2}(x_0, y_0)$; $\Delta = AC - B^2$.
  - Nếu $\Delta > 0$ thì M_0 là *điểm cực trị*. Cụ thể $A > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu; còn khi $A < 0$ thì điểm M_0 là điểm cực đại. Ta tính giá trị cực trị $z_0 = f(M_0)$.
  - Nếu $\Delta < 0$ thì M_0 *không là điểm cực trị*.
  - Khi $\Delta = 0$ thì chưa thể kết luận được. Ta cần xem xét, phân tích thêm các thông tin khác để kết luận được cho điểm M_0.
- **Bước 4**: Tóm tắt các kết quả và kết luận về cực trị của hàm số đã cho.

c) Ví dụ 6: Tìm cực trị (nếu có) của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Giải

Rõ ràng z xác định trên toàn mặt phẳng. Đạo hàm riêng cấp một và hai của z như sau:

$z'_x = 3x^2 - 3y = 3(x^2 - y)$, $z'_y = 3y^2 - 3x = 3(y^2 - x)$;

$z''_{x^2} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{y^2} = 6y$.

Ta tìm các điểm dừng

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0; \\ x = y = 1. \end{array}\right.$$

Ta được đúng hai điểm dừng O(0, 0) và M(1, 1).

Bây giờ ta kiểm tra điều kiện có cực trị tại từng điểm dừng

- Xét điểm O(0, 0). Tại điểm này ta tính được

$A = z''_{x^2}(0, 0) = 6\times0 = 0$, $B = z''_{xy}(0, 0) = -3$,

$C = z''_{y^2}(0, 0) = 6\times0 = 0$, $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 = 0\times0 - (-3)^2 = -9 < 0$.

Do đó O(0, 0) không phải là điểm cực trị của hàm z.

- Xét điểm dừng M(1, 1). Tại điểm này ta tính được

$A = z''_{x^2}(1, 1) = 6\times1 = 6$, $B = z''_{xy}(1, 1) = -3$,

C = $z''_{y^2}(1, 1) = 6\times1 = 6$, $\Delta = AC - B^2 = 6\times6 - (-3)^2 = 27 > 0$.

Do đó M(1, 1) là điểm cực trị, lại vì A = 6 > 0 nên M là điểm cực tiểu của z với giá trị cực tiểu $z_{min} = z(1, 1) = 1^3 + 1^3 - 3\times1\times1 = -1$.

Kết luận: Hàm số đã cho không có cực đại nào và có cực tiểu duy nhất tại M(1, 1) với giá trị cực tiểu $z_{min} = -1$.

d) **Áp dụng trong Kinh tế**: Để giải các bài thuộc dạng áp dụng phép tính vi phân và đạo hàm riêng hàm hai biến trong Kinh tế học, ta thường thực hiện các bước dưới đây.

- **Bước 1:** Phân tích cá yếu tố trong đề để thiết lập các hàm kinh tế cần thiết và chuyển vấn đề kinh tế về bài toán toán học thuần túy.
- **Bước 2:** Giải bài toán toán học tương ứng đó.
- **Bước 3:** Diễn giải các kết quả từ bài toán toán học trở về vấn đề kinh tế mà đề ra yêu cầu.

e) **Ví dụ 7**: Một doanh nghiệp sản xuất và độc quyền tiêu thụ một loại sản phẩm tại hai thị trường khác nhau với đơn giá cho mỗi sản phẩm tại từng thị trường lần lượt là $p_1 = 700$, $p_2 = 550$ (đơn vị tính: nghìn VNĐ). Giả sử tổng chi phí sản xuất của doanh nghiệp đó như sau

$$C = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + 50Q_2 + 300;\ Q_1 \ge 0, Q_2 \ge 0.$$

Ở đây Q_1, Q_2 lần lượt là lượng sản phẩm tiêu thụ ở từng thị trường. Hỏi doanh nghiệp đó cần tiêu thu bao nhiêu sản phẩm ở mỗi thị trường để tối ưu hóa lợi nhuận.

Giải

Doanh thu R và lợi nhuận π của doanh nghiệp đó được cho bởi

$$R = 700Q_1 + 550Q_2;\ Q_1 \ge 0, Q_2 \ge 0.$$

$$\pi = R - C = 700Q_1 + 500Q_2 - Q_1^2 - Q_1Q_2 - Q_2^2 - 300;\ Q_1 \ge 0, Q_2 \ge 0.$$

Vấn đề xác định mức tiêu thụ sản phẩm của doanh nghiệp đo tại mỗi thị trường để tối ưu hóa lợi nhuận quy về bài toán cực trị (tự do) như sau: Tìm Q_1, Q_2 không âm sao cho hàm

$$\pi = R - C = 700Q_1 + 500Q_2 - Q_1^2 - Q_1Q_2 - Q_2^2 - 300;\ Q_1 \ge 0, Q_2 \ge 0$$

đạt cực đại.

Bây giờ ta giải bài toán tương ứng và khá đơn giản này. Để tiện, ta đặt

$$\pi'_1 = \pi'_{Q_1},\ \pi'_2 = \pi'_{Q_2},\ \pi''_{11} = \pi''_{Q_1Q_1},\ \pi''_{12} = \pi''_{Q_1Q_2},\ \pi''_{22} = \pi''_{Q_2Q_2}.$$

Khi đó, các đạo hàm riêng cấp 1, 2 của π như sau

$\pi'_1 = 700 - 2Q_1 - Q_2$, $\pi'_2 = 500 - Q_1 - 2Q_2$, $\pi''_{11} = -2$, $\pi''_{12} = -1$, $\pi''_{22} = -2$;
$Q_1 \ge 0, Q_2 \ge 0$.

Ta tìm điểm dừng

$$\begin{cases} \pi_1' = 700 - 2Q_1 - Q_2 \\ \pi_2' = 500 - Q_1 - 2Q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = 300; \\ Q_2 = 100. \end{cases}$$

Ta được điểm dừng duy nhất M(300, 100). Tại điểm dừng này ta tính được

$$A = C = -2 < 0,\ B = 0 - 1,\ \Delta = AC - B^2 = 3 > 0.$$

Do đó π đạt cực đại duy nhất tại M(300, 100) với giá trị cực đại $\pi_{max} = 129.700$.

Kết luận: Khi doanh nghiệp đó tiêu thụ $Q_1 = 300$ sản phẩm ở thị trường thứ nhất, $Q_2 = 100$ sản phẩm ở thị trường thứ hai thì sẽ đạt lợi nhuận tối đa là

$$\pi_{max} = 129{,}7 \text{ triệu VNĐ}.$$

2.3. Áp dụng ĐHR để tìm cực trị có điều kiện của hàm 2 biến và phân tích tối ưu trong Kinh tế

a) Khái niệm về cực trị có điều kiện: Xét hàm số hai biến z = f(x, y) xác định trên miền phẳng D kèm với điều kiện bổ sung giữa hai biến x, y cho bởi phương trình φ(x, y) = 0. Giả sử (x_0, y_0) là một điểm trên D và thỏa mãn điều kiện đã cho, tức là $\varphi(x_0, y_0) = 0$.

- Ta nói hàm z = f(x, y) *đạt cực tiểu với điều kiện* φ(x, y) = 0 tại (x_0, y_0) nếu $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ với mọi điểm (x, y) nằm trong một lân cận của (x_0, y_0), thuộc D và thỏa mãn điều kiện đã cho. Lúc đó, ta cũng nói (x_0, y_0) là một *điểm cực tiểu với điều kiện* φ(x, y) = 0 và $z_0 = f(x_0, y_0)$ gọi là một *giá trị cực tiểu với điều kiện đã cho* của hàm số đang xét. Hàm φ(x, y) ở vế trái của điều kiện gọi là *hàm xác định điều kiện* của cực trị.
- Ta nói hàm z = f(x, y) *đạt cực đại với điều kiện* φ(x, y) = 0 tại (x_0, y_0) nếu $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ với mọi điểm (x, y) nằm trong một lân cận của (x_0, y_0), thuộc D và thỏa mãn điều kiện đã cho. Lúc đó, ta cũng nói (x_0, y_0) là một *điểm cực đại với điều kiện* φ(x, y) = 0 và $z_0 = f(x_0, y_0)$ gọi là một *giá trị cực đại với điều kiện đã cho* của hàm số đang xét.
- Các điểm cực tiểu hay cực đại với điều kiện còn gọi chung là *điểm cực trị điều kiện*, các giá trị cực tiểu hay cực đại với điều kiện còn gọi chung là *giá trị cực trị điều kiện* của hàm đang xét. Hàm số đạt cực tiểu hay cực đại với điều kiện cũng gọi chung là *đạt cực trị điều kiện*.

b) Thuật toán tìm cực trị điều kiện

Bài toán cơ bản: Cho hàm hai biến z = f(x, y) và hàm điều kiện φ(x, y) xác định và khả vi liên tục đến cấp 2 trên miền phẳng D. Tìm cực trị điều kiện (nếu có) của z = f(x, y) với điều kiện φ(x, y) = 0.

Chú ý Đôi khi miền xác định D chưa được chỉ ra và cần phải tìm từ sự có nghĩa của biểu thức xác định của z = f(x, y) và φ(x, y).

Phương pháp nhân tử Lagrange

Ý tưởng cơ bản của thuật toán này là dùng hàm bổ trợ Lagrange để quy bài toán tìm cực trị điều kiện của hàm z đã cho về tìm cực trị tự do của hàm Lagrange. Cụ thể, ta tiến hành các bước dưới đây.

- ***Bước 1***: *Tìm miền xác định chung (nếu cần) của $z = f(x, y)$ và $\varphi(x, y)$. Lập hàm Lagrange $L = L(x, y) = z(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, λ là nhân tử Lagrange, rồi tính các đạo hàm riêng cấp 1, 2 của L theo x, y.*
- ***Bước 2***: *Giải hệ 3 phương trình 3 ẩn λ, x, y sau đây*

$$\begin{cases} L'_x = z'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0 \\ L'_y = z'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) \qquad\qquad\qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

để tìm nhân tử λ và các điểm dừng tương ứng.

  - *Nếu hệ vô nghiệm, tức là không có điểm dừng nào. Ta dừng thuật toán và kết luận hàm số z không có cực trị với điều kiện đã cho.*
  - *Nếu hệ có nghiệm thì mỗi nghiệm, tức là một bộ ba (λ_0, x_0, y_0) nào đó, cho ta một nhân tử $\lambda = \lambda_0$ và một điểm dừng tương ứng $M_0(x_0, y_0)$. Ta cần làm tiếp bước 3.*

- ***Bước 3***: *Kiểm tra điều kiện có cực trị điều kiện tại từng điểm dừng và nhân tử tương ứng.*

Chẳng hạn xét điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$ ứng với nhân tử λ_0. Ta tính định thứ Hesse (hay Hessian) H tại M_0 với λ_0 tương ứng, ở đây

$$H = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & \varphi'_x \\ L''_{xy} & L''_{yy} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix} \text{ với } x = x_0, y = y_0, \lambda = \lambda_0.$$

  - *Nếu $H > 0$ thì điểm M_0 là điểm cực đại có điều kiện với $z_{max} = z(x_0, y_0)$.*
  - *Nếu $H < 0$ thì điểm M_0 là điểm cực tiểu có điều kiện với $z_{min} = z(x_0, y_0)$.*
  - *Nếu $H = 0$ thì chưa thể kết luận gì về điểm M_0 mà cần xem xét, phân tích thêm các thông tin khác.*

- ***Bước 4***: *Tóm tắt kết quả và kết luận về cực trị điều kiện của hàm số đã cho.*

Nhận xét: *Nếu điều kiện gốc chưa có dạng $\varphi(x, y) = 0$ mà chỉ có dạng $\alpha(x, y) = \beta(x, y)$ thì cần biến đổi: $\alpha(x, y) = \beta(x, y) \Leftrightarrow \alpha(x, y) - \beta(x, y) = 0$, rồi đặt vế trái là $\varphi(x, y)$. Khi tập xác định D chưa được chỉ rõ thì cần xác định D ngay trước khi lập hàm Lagrange.*

c) *Ví dụ 8*: *Tìm cực trị của hàm $z = 6 - 4x - 3y$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.*

Giải

Trước hết ta cần đưa điều kiện về dạng vế phải triệt tiêu để nhận được hàm điều kiện

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Ta được hàm điều kiện $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Rõ ràng hàm này cùng với z đã cho đều xác định trên toàn bộ mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Hàm Lagrange như sau

$$L = L(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Ta tính các đạo hàm riêng cấp 1, 2 của L và các đạo hàm riêng của hàm điều kiện φ. Cụ thể tại mọi điểm (x, y) và mọi nhân tử λ, ta có

$L'_x = -4 + 2\lambda x = 2(\lambda x - 2)$; $L'_y = -3 + 2\lambda y = 2\lambda y - 3$;

$L''_{x^2} = 2\lambda = L''_{y^2}$ *(không phụ thuộc x, y);*

$L''_{xy} = 0$ *(hằng số không phụ thuộc x, y và λ);*

$\varphi'_x = 2x$ *(không phụ thuộc y),* $\varphi'_y = 2y$ *(không phụ thuộc x).*

Ta tìm các điểm dừng và nhân tử Lagrange tương ứng

$$\begin{cases} z'_x(x,y) + \lambda\varphi'_x(x,y) = 0 \\ z'_y(x,y) + \lambda\varphi'_y(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x - 2 = 0 & (1) \\ 2\lambda y - 3 = 0 & (2) \\ x^2 + y^2 = 1 & (3) \end{cases}$$

Để giải hệ này, thường thường ta sẽ rút x, y theo λ từ (1), (2) rồi thay vào (3) để tìm λ. Sau đó thế trở lại để tìm x, y. Cụ thể ta có

$$\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{\lambda} \\ y = \dfrac{3}{2\lambda} \end{cases} \quad \text{(Hiển nhiên là } \lambda \neq 0\text{)}$$

Thay x, y trong biểu thức trên vào (3) ta được

$$\left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{5}{2}; \\ \lambda = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Như vậy, ta được cặp nhân tử Lagrange phân biệt $\lambda_1 = -\dfrac{5}{2}$ *và* $\lambda_2 = \dfrac{5}{2}$. *Từ đó, ta nhận được cặp điểm dừng tương ứng như dưới đây.*

- $\lambda_1 = -5/2$ *có điểm dừng tương ứng* $M_1(-4/5, -3/5)$.
- $\lambda_2 = 5/2$ *có điểm dừng tương ứng* $M_2(4/5, 3/5)$.

Bây giờ ta dùng Hessian để kiểm tra điểm dừng M_1 *với nhân tử Lagrange* λ_1 *tương ứng và điểm* M_2 *với nhân tử Lagrange* λ_2.

- *Với* $\lambda_1 = -5/2$ *và* $M_1(-4/5, -3/5)$ *ta tính được* $H = 20 > 0$. *Do đó z đạt cực đại tại* M_1 *với điều kiện đã cho và* $z_{max} = z(M_1) = 11$.
- *Với* $\lambda_2 = 5/2$ *và* $M_2(4/5, 3/5)$ *ta tính được* $H = 0 - 20 < 0$. *Do đó z đạt cực tiểu với điều kiện đã cho tại M2 và* $z_{min} = z(M_2) = 1$.

***Kết luận**: Trong điều kiện* $x^2 + y^2 = 1$, *hàm* $z = 6 - 4x - 3y$ *đạt duy nhất một cực đại điều kiện tại* $M_1(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ *với* $z_{max} = z(M_1) = 11$ *và duy nhất một cực tiểu điều kiện tại* $M_2(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ *với* $z_{min} = z(M_2) = 1$.

d) Nhận xét về phương pháp thế tìm cực trị có điều kiện: Khi điều kiện $\varphi(x, y) = 0$ có thể giải dễ dàng để biểu diễn $y = y(x)$ theo x (hoặc $x = x(y)$ theo y) thì ta có thể thế $y = y(x)$ (hoặc $x = x(y)$) vào z để được hàm 1 biến x (hoặc y). Bài toán quy về tìm cực trị hàm 1 biến $z = f(x, y(x))$ hoặc $z = f(x(y), y)$.

Ví dụ 9: Tìm cực trị (nếu có) của hàm số $z = x^2 + 2y$ với điều kiện $x^2 - y = 1$.
Giải Điều kiện $x^2 - y = 1 \Leftrightarrow y = x^2 - 1$. Thay vào z ta được:

$$z = x^2 + 2(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 1.$$

Bài toán quy về tìm cực trị (tự do) của hàm (1 biến) $z = 3x^2 - 1$. Ta làm như thông thường. Ta có $z'(x) = 6x$, $z''(x) = 6$. Hàm số chỉ có một điểm dừng $x = 0$ ứng với $y = -1$. Vì $z'' = 6 > 0$ nên z đạt cực tiểu tại $M(0, -1)$ với $z_{min} = -1$.

Kết luận: Trong điều kiện $x^2 - y = 1$, hàm z không có cực đại điều kiện nào và đạt cực tiểu điều kiện duy nhất tại điểm $M(0, -1)$ với $z_{min} = -1$.

e) Ví dụ 10 (Tối ưu hóa lợi ích trong điều kiện ngân sách chi tiêu cố định & lượng cầu Marshall): Xét hai loại hàng hóa X, Y trên thị trường với giá của mỗi đơn vị hàng hóa X, Y lần lượt là 5USD và 20USD. Giả sử hàm lợi ích được cho bởi $U = (x + 3)y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$. Hãy chọn túi hàng (x, y) để tối ưu hóa lợi ích trong điều kiện ngân sách dành cho tiêu dùng là 185USD.

Giải

Mỗi túi hàng (x, y) đều phải thỏa mãn điều kiện ngân sách $5x + 20y = 185$ (USD). Do đó vấn đề tối ưu hóa lợi ích quy về bài toán tìm cực đại điều kiện của hàm lợi ích $U = (x + 3)y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$ với điều kiện $5x + 20y = 185$.
Điều kiện trên tương đương với

$$5x + 20y - 185 = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 37 = 0$$

Cách 1 *(Dùng phương pháp nhân tử Lagrange)*

Đặt $\varphi(x, y) = x + 4y - 37$ (vế trái của điều kiện cuối cùng) và xét hàm Lagrange

$$L = L(x, y) = U + \lambda\varphi(x, y) = (x + 3)y + \lambda(x + 4y - 37);\ \ x \geq 0, y \geq 0.$$

Các đạo hàm riêng của L và φ:

$$L'_x = y + \lambda,\ \ L'_y = x + 3 + 4\lambda;\ \ L''_{xx} = 0 = L''_{yy},\ \ L''_{xy} = 1;\ \ x \geq 0, y \geq 0.$$
$$\varphi'_x = 1,\ \ \varphi'_y = 4;\ \ x \geq 0, y \geq 0.$$

Lập hệ phương trình xác định điểm dừng và giải hệ ta được

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + \lambda = 0 \\ x + 3 + 4\lambda = 0 \\ x + 4y - 37 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -5; \\ x = 17; \\ y = 5. \end{cases}$$

Ta được nhân tử Lagrange $\lambda = -5$ duy nhất và điểm dừng duy nhất tương ứng là $M(17, 5)$.

Ta tính Hessian để kiểm tra điểm dừng M và λ. Vì $L''_{xx} = 0 = L''_{yy}$, $L''_{xy} = 1$ và $\varphi'_x = 1$, $\varphi'_y = 4$ (hằng số không phụ thuộc x, y, λ) nên ta được

$$H = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & \varphi'_x \\ L''_{xy} & L''_{yy} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 8 > 0.$$

Như vậy là, trong điều kiện (5.4.1), hàm lợi ích đạt duy nhất một cực đại điều kiện tại M(17, 5) với U_{max} = (17 + 3)5 = 100.

Ta chú ý rằng vì U khả vi liên tục (trên miền phẳng $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$và chỉ đạt duy nhất một cực đại điều kiện mà không đạt cực tiểu điều kiện nên giá trị cực đại điều kiện đó cũng là giá trị lớn nhất của U trong điều kiện đang xét. Ta trở lại kết luận vấn đề của Kinh tế: Túi hàng (x = 17, y = 5) làm tối ưu hóa lợi ích U_{max} = 100 trong điều kiện ngân sách (5.4.1). Ở đây, $\bar{x}$ = 17, $\bar{y}$ = 5 trong Kinh tế được gọi là lượng cầu Marshall tương ứng.

Cách 2 (Dùng phương pháp thế)
Điều kiện 5x + 20y – 185 = 0 ⇔ x + 4y – 37 = 0 có thể dễ dàng giải để rút được x theo y. Cụ thể

$$x + 4y - 37 = 0 \Leftrightarrow x = 37 - 4y.$$

Điều kiện x ≥ 0, y ≥ 0 cho ta 0 ≤ y ≤ 37/4.
Thay vào hàm U ta được

$$U = (x + 3)y = (37 - 4y + 3)y \Leftrightarrow U = U(x) = -4y^2 + 40y.$$

Ta cần tìm y ∈[0, 37/4] để U_{max}.
Ta có
U’ = – 8y + 40; U’’ = – 8;
U’ = 0 ⇔ – 8y + 40 = 0 ⇔ y = 5 (nhận) ⇒ x = 37 – 4×5 = 17 (nhận).
Vì U’’(5) = 0 – 8 < 0 nên U đạt cực đại tại y = 5 với

$$U_{max} = U(5) = -4\times5^2 + 40\times5 = 100.$$

Kết luận: Với túi hàng hóa (x = 17, y = 5) thì lợi ích tối đa U_{max} = 100.

f) *Ví dụ 11 (Tối ưu hóa chi phí trong điều kiện lợi ích không đổi & lượng cầu Hick):* *Giả sử người tiêu dùng có hàm lợi ích U = xy + 2x; x ≥ 0, y ≥ 0 (x, y lần lượt là lượng từng loại hàng hóa). Giá của từng loại hàng là p_1 = 4USD, p_2 = 9USD. Giả sử người tiêu dùng muốn thụ hưởng mức lợi ích cố định U_0 = 900. Hãy tối ưu hóa chi phí và xác định lượng cầu Hick tương ứng.*

Giải

Với mỗi túi hàng (x, y), chi phí tiêu dùng là C = 4x + 9y; x ≥ 0, y ≥ 0. Vấn đề kinh tế trở thành bài toán cực tiểu điều kiện sau: tìm (x, y) để C = 4x + 9y cực tiểu với điều kiện U(x, y) = xy + 2x = 900; x ≥ 0, y ≥ 0.
Ta giải bài toán này bằng phương pháp Lagrange. Ta có

$$xy + 2x = 900 \Leftrightarrow xy + 2x - 900 = 0.$$

Hàm điều kiện: φ = xy + 2x – 900.

Hàm Lagrange: L = 4x + 9y + λ(xy + 2x – 900)

Các đạo hàm riêng của L và φ

$L'_x = 4 + \lambda(y + 2)$, $L'_y = 9 + \lambda x$; $x \geq 0, y \geq 0$.
$L''_{xx} = 0 = L''_{yy}$, $L''_{xy} = \lambda$; $x \geq 0, y \geq 0$.
$\varphi'_x = y + 2$, $\varphi'_y = x$; $x \geq 0, y \geq 0$.

Tìm điểm dừng

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + \lambda(y+2) = 0 \\ 9 + \lambda x = 0 \\ xy + 2x = 900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -0,2; \\ x = 45; \\ y = 18. \end{cases}$$

Như vậy là chỉ có duy nhất một điểm dừng M(45, 18) ứng với nhân tử Lagrange duy nhất $\lambda = -0,2$.

Kiểm điều kiện cực trị tại điểm M(45, 18) và $\lambda = -0,2$, ta có

$$L''_{xx} = L''_{yy} = 0,\ L''_{xy} = -0,2,\ \varphi'_x = 20,\ \varphi'_y = 45;$$

$$H = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & \varphi'_x \\ L''_{xy} & L''_{yy} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -0,2 & 20 \\ -0,2 & 0 & 45 \\ 20 & 45 & 0 \end{vmatrix} = -360 < 0.$$

Do đó M(45, 18) là điểm cực tiểu điều kiện với C_{min} = 342USD.

***Kết luận vấn đề kinh tế**: Để chi phí tối thiểu, lượng cầu Hick tương ứng phải là $x = 45$, $y = 18$. Lúc đó chi phí C = 342USD nhỏ nhất.*

Ví dụ 12 (Tối đa hóa sản lượng trong điều kiện ngân sách cố định)
Một doanh nghiệp cạnh tranh thuần túy có hàm sản xuất là Q = K(L + 5). Biết rằng giá thuê một đơn vị vốn là w_K = 5USD, giá thuê nhân công giá w_L = 10USD và doanh nghiệp sản xuất trong điều kiện ngân sách cố định B = 950USD. Xác định lượng cầu Marshall của vốn và nhân công mà doanh nghiệp cần sử dụng để tối đa hóa sản lượng.

Giải

Gọi K là lượng vốn, L là lượng nhân công mà doanh nghiệp cần sử dụng. Khi dó điều kiện ngân sách cố định B = 950USD trở thành

$$5K + 10L = 950 \Leftrightarrow K + 2L - 190 = 0.$$

Vấn đề kinh tế của doanh nghiệp được đưa về bài toán: chọn K, L (K > 0, L > 0) để hàm Q = K(L + 5) cực đại trong điều kiện K + 2L – 190 = 0.

Ta có hàm điều kiện $\varphi = \varphi(K, L) = K + 2L - 190$. Vì điều kiện giải được ngay K = 190 – 2L nên ta dùng phương pháp thế. Thay vào Q ta được

$$Q = (190 - 2L)(L + 5) = -2L^2 + 180L + 950 \text{ (hàm 1 biến L)}$$

Ta có Q'(L) = – 4L + 180; Q"(L) = – 4 < 0 (với mọi L > 0). Bởi thế Q chỉ có thể đạt cực đại.

$$Q'(L) = 0 \Leftrightarrow -4L + 180 = 0 \Leftrightarrow L = 45\ (> 0) \Rightarrow K = 190 - 2.45 = 100\ (> 0).$$

Do đó Q đạt cực đại tại L = 45, tương ứng K = 100 với

$$Q_{max} = Q(100, 45) = 100(45 + 5) = 5000$$

Kết luận vấn đề kinh tế: Trong điều kiện ngân sách cố định B = 950USD, doanh nghiệp đó cần sử dụng lượng vốn K = 100 và L = 45 nhân công để tối đa hóa sản lượng Q_{max} = 5000 (sản phẩm).

BÀI TẬP

2.1. Một doanh nghiệp sản xuất và kinh doanh độc quyền 2 loại sản phẩm với giá bán mỗi đơn vị sản phẩm lần lượt là P_1, P_2 (đơn vị tính: triệu VNĐ). Giả sử hàm cầu của hai loại hàng hóa đó là

$$P_1 = 90 - Q_1 + Q_2,\ P_2 = 160 + Q_1 - 2Q_2.$$

Cho biết chi phí của doanh nghiệp là

$$C = C(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 - 1000;\ Q_1 > 0,\ Q_2 > 0.$$

Tìm mức sản lượng của từng loại hàng hóa để tối đa hóa lợi nhuận.

2.2. Một doanh nghiệp sản xuất và kinh doanh độc quyền 2 loại sản phẩm với giá bán mỗi đơn vị sản phẩm đó lần lượt là P_1, P_2 (đơn vị tính: triệu VNĐ). Giả sử hàm cầu đối với hai loại hàng hóa đó được cho bởi

$$P_1 = 20 - Q_1 + Q_2,\ P_2 = 55 + Q_1 - 2Q_2.$$

Cho biết chi phí của doanh nghiệp là

$$C = C(Q_1, Q_2) = 2Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2 + 25;\ Q_1 > 0,\ Q_2 > 0.$$

Xác định mức sản lượng Q_1, Q_2 để tối ưu hóa lợi nhuận của doanh nghiệp.

2.3. Xét hai loại hàng hóa X, Y trên thị trường với giá của mỗi đơn vị hàng hóa X, Y lần lượt là 50USD và 200USD. Giả sử hàm lợi ích được cho bởi $U = (x + 30)y$; $x \geq 0$, $y \geq 0$ (x, y là lượng hàng hóa X, Y tương ứng). Hãy chọn túi hàng (x, y) để tối ưu hóa lợi ích trong điều kiện ngân sách dành cho tiêu dùng là 1850USD. Xác định lượng cầu Marshall tương ứng của X, Y.

2.4. Xét hai loại hàng hóa X, Y trên thị trường với giá của mỗi đơn vị hàng hóa X, Y lần lượt là 100USD và 25USD. Giả sử hàm lợi ích được cho bởi $U = x(y + 15)$; $x \geq 0$, $y \geq 0$ (x, y là lượng hàng hóa X, Y tương ứng). Hãy chọn túi hàng (x, y) để tối ưu hóa lợi ích trong điều kiện ngân sách dành cho tiêu dùng là 925USD. Xác định lượng cầu Marshall tương ứng của X, Y.

3. Nguyên hàm, tích phân bất định và ứng dụng trong kinh tế

3.1. Nguyên hàm, tích phân bất định và bảng nguyên hàm của một số hàm sơ cấp cơ bản

a) **Nguyên hàm**: Hàm số F(x) được gọi là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên tập xác định D nếu F(x) khả vi trên D và đạo hàm của F(x) là f(x), tức là

$$F'(x) = f(x), \forall x \in D.$$

b) **Tích phân bất định (Họ nguyên hàm)**: Tập hợp tất cả các nguyên hàm của hàm số f(x) được gọi là họ nguyên hàm hay tích phân bất định của f(x) và kí hiệu là $\int f(x)dx$.

Như vậy, nếu f(x) có một nguyên hàm là F(x) trên D thì tích phân bất định của nó là

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \forall x \in D \text{ (C là hằng số tùy ý)}$$

c) **Tính chất của tích phân bất định và bảng tích phân bất định của một số hàm sơ cấp cơ bản**

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \qquad \int kf(x)dx = k\int f(x)dx \text{; k là hằng số}$$

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \quad \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad 0 < a \neq 1 \qquad \int e^x dx = e^x + C$$

d) **Ví dụ 13**: $\int (3x^2 - 8x + 10)dx = x^3 - 4x^2 + 10x + C$; $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$.

3.2. Ứng dụng tích phân bất định trong Kinh tế

a) **Xác định quỹ vốn theo lượng đầu tư**: Giả sử việc để đầu tư kinh doanh của một doanh nghiệp được tiến hành liên tục theo thời gian. Gọi K(t), I(t) lần lượt là quỹ vốn và lượng đầu tư tại thời điểm t của doanh nghiệp đó. Cho t biến thiên trong một khoảng thời gian nhất định ta nhận được hàm quỹ vốn K = K(t) và lượng đầu tư I = I(t) theo một biến (thời gian) t. Ta cũng thường cho biến thời gian t không âm, tức là cho t xuất phát từ thời điểm $t_0 = 0$. Tuy nhiên đôi khi cũng xét thời điểm xuất phát là t_0 tùy ý.

Rõ ràng, lượng đầu tư I(t) tại thời điểm t chính là lượng bổ sung (gia tăng) của quỹ vốn tại t. Nói khác đi, I(t) chính là tốc độ gia tăng tức thời (hay biên tế) của quỹ vốn K(t). Tức là K'(t) = I(t); $\forall t \geq 0$. Từ đó ta có

$$K(t) = \int I(t)dt.$$

ở đây, hằng số C trong tích phân bất định chính là quỹ vốn ban đầu $K_0 = K(0)$ tại thời điểm $t_0 = 0$ (vốn gốc).

b) Xác định hàm tổng biết hàm cận biên: Xét một biến số kinh tế bất kỳ mang ý nghĩa tổng giá trị (chẳng hạn tổng chi phí C, tổng doanh thu R, tổng lợi nhuận π, … Khi đó, nếu biết hàm giá trị cận biên (chẳng hạn chi phí cận biên, doanh thu cận biên, lợi nhuận cận biên, …) thì dễ dàng tính được hàm tổng giá trị bằng cách lấy tích phân bất định của các hàm cận biên. Ở đây, cần lưu ý rằng hằng số C trong các tích phân bất định sẽ được xác định khi cho thêm một điều kiện bổ sung mà được gọi là điều kiện đầu.

3.3. Các ví dụ

a) Ví dụ 14: Giả sử một doanh nghiệp có lượng đầu tư (đơn vị tính: triệu đồng) theo thời gian t cho bởi $I(t) = 210t^{0,75}$; $t \geq 0$. Hãy xác định quỹ vốn theo thời gian của doanh nghiệp đó biết rằng quỹ vốn ban đầu là $K_0 = 120$ (triệu đồng).

<u>Giải</u> Quỹ vốn theo t là

$$K(t) = \int I(t)dt = 210\int t^{0,75}dt = 210 \times \frac{t^{1,75}}{1,75} + C = 120t^{1,75} + C;\ t \geq 0.$$

Vì quỹ vốn ban đầu (thời điểm t = 0) là $K_0 = 120$ nên ta có

$$K(0) = K_0 \Leftrightarrow 120\times 0 + C \Leftrightarrow C = 120.$$

Vậy quỹ vốn theo thời gian của doanh nghiệp đó là

$$K(t) = 120t^{1,75} + 120;\ t \geq 0.$$

b) Ví dụ 15: Giả sử chi phí cận biên của một doanh nghiệp ở mỗi mức sản lượng Q được cho bởi hàm $MC = 30 - 40Q + 9Q^2$. Biết rằng doanh nghiệp có chi phí cố định (Fixed Cost) là FC = 100. Hãy xác định tổng chi phí TC và chi phí khả biến (Variable Cost) VC = TC – FC (tức là phần chi phí biến đổi phụ thuộc vào sản lượng) theo Q (đơn vị tính: triệu đồng).

Giải

$$TC = TC(Q) = \int MCdQ = \int (30 - 40Q + 9Q^2)dQ$$
$$= 30Q - 20Q^2 + 3Q^3 + C.$$

Chi phí cố định là chi phí mà doanh nghiệp phải chi tiêu ngay cả khi không sản xuất, tức là khi Q = 0. Nói cách khác,

$$FC = TC(0) \Leftrightarrow TC(0) = 100 \Leftrightarrow C = 100.$$

Vậy tổng chi phí là $TC = 100 + 30Q - 20Q^2 + 3Q^3$; $Q \geq 0$.

Suy ra chi phí khả biến là $VC = TC - FC = 30Q - 20Q^2 + 3Q^3$; $Q \geq 0$.

c) Ví dụ 16: Giả sử lượng đầu tư tại thời điểm t cho bởi $I = I(t) = 180t^{0,8}$, $t \geq 0$. Hãy xác định quỹ vốn biết rằng vốn ban đầu là 200.

Giải

Quỹ vốn xác định bởi

$$K(t) = \int I(t)dt = \int 180t^{0,8}dt = 100t^{1,8} + C;\ t \geq 0.$$

Vì vốn ban đầu là K(0) = C = 200 nên $K(t) = 100t^{1,8} + 200$; $t \geq 0$.

d) Ví dụ 17: Giả sử chi phí cận biên của một doanh nghiệp ở mỗi mức sản lượng Q được cho bởi hàm $MC = 450 - 600Q + 135Q^2$. Biết rằng doanh nghiệp có chi phí cố định là FC = 1000. Hãy xác định tổng chi phí TC và chi phí khả biến VC = TC – FC theo Q (đơn vị tính: triệu đồng).

Giải

$$TC = TC(Q) = \int MCdQ = \int (450 - 600Q + 135Q^2)dQ$$
$$= 450Q - 300Q^2 + 45Q^3 + C.$$

Chi phí cố định là chi phí mà doanh nghiệp phải chi tiêu ngay cả khi không sản xuất, tức là khi Q = 0. Nói cách khác,

$$FC = TC(0) \Leftrightarrow TC(0) = 1000 \Leftrightarrow C = 1000.$$

Vậy tổng chi phí là $TC = 1000 + 450Q - 300Q^2 + 45Q^3$; $Q \geq 0$.

Suy ra chi phí khả biến là $VC = TC - FC = 450Q - 300Q^2 + 45Q^3$; $Q \geq 0$.

BÀI TẬP

3.1. Áp dụng tích phân bất định giải quyết các vấn đề kinh tế dưới đây.

a) Tìm hàm tổng chi phí theo sản lương Q biết chi phí cố định là 100 (triệu đồng) và hàm chi phí cận biên $MC = 3Q^2 + 4Q$ (đơn vị tính: triệu đồng).

b) Tìm quỹ vốn theo thời gian t biết vốn ban đầu là 5 và lượng đầu tư $I = 4t^3 + 3t^2 + 2t$ (đơn vị tính: tỉ đồng).

3.2. Áp dụng tích phân bất định giải quyết các vấn đề kinh tế dưới đây.

a) Giả sử lượng đầu tư tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $I = 140t^{0,75}$. Cho biết thêm rằng quỹ vốn tại thời điểm xuất phát là K(0) = 150. Xác định quỹ vốn theo thời gian t (đơn vị tính: triệu đồng).

b) Giả sử ở mức sản lượng Q, chi phí cận biên là $MC = 25 - 30Q + 9Q^2$ và chi phí cố định FC=55. Xác định hàm tổng chi phí (đơn vị tính: triệu đồng).

c) Giả sử ở mỗi mức sản lượng Q doanh thu cận biên là $MR = 60 - 2Q - 2Q^2$. Hãy xác định hàm tổng doanh thu và hàm cầu đối với sản phẩm (đơn vị tính: triệu đồng).

3.3. Áp dụng tích phân bất định giải quyết các vấn đề kinh tế dưới đây.

a) Giả sử hàm tiêu dùng cận biên (Marginal Propensity to consume) phụ thuộc vào mức thu nhập Y bởi hàm số $MPC = 0,6 + 0,1Y^{-(1/3)}$. Hãy xác định hàm tiêu dùng C(Y) theo thu nhập Y biết rằng mức tiêu dùng thiết yếu (tức là tiêu dùng bắt buộc phải chi cả khi không có thu nhập) là 50 (đơn vị tính: tỉ đồng).

b) Giả sử ở mỗi mức sản lượng Q, chi phí cận biên là $MC = 3e^{0,3Q}$. Tìm hàm chi phí C(Q) biết chi phí cố định là $C_0 = 90$ (đơn vị tính: triệu đồng).

3.4. Áp dụng tích phân bất định giải quyết các vấn đề kinh tế dưới đây.

a) Cho hàm xu thế cận biên của tiết kiệm (Marginal Propensity of Saving) phụ thuộc vào mức thu nhập Y bởi hàm $MS = 0,5 - 0,1Y^{-0,5}$. Tìm hàm tiết kiệm S(Y) theo thu nhập Y biết rằng S = 0 khi Y = 81 (đơn vị tính: triệu đồng).

b) Cho biết ở mỗi mức tổng thu nhập quốc dân Y (đơn vị tính: tỉ USD), hàm xu hướng nhập khẩu cận biên là MI = 0,1. Tìm hàm nhập khẩu I(Y) biết rằng I(20) = 20.

PHẦN 2

XÁC SUẤT & THỐNG KÊ TOÁN HỌC

1. LÝ THUYẾT MẪU

1.1. Tổng thể và mẫu

1.1.1. Tổng thể: Tập hợp tất cả các phần tử mà ta quan tâm nghiên cứu trong bài toán thống kê nào đó được gọi là ***tổng thể***. Số phần tử của tổng thể được gọi là ***dân số*** của tổng thể. Dân số thường là lớn – có thể vô hạn.

1.1.2. Mẫu: Một tập con các phần tử được lấy ra từ tổng thể theo một cách nào đó để phản ánh trung thành tổng thể được gọi là ***mẫu***. Số phần tử của mẫu được gọi là ***kích thước mẫu*** hay ***cỡ mẫu*** . Kích thước mẫu thường là nhỏ hơn nhiều so với dân số.

1.1.3. Phương pháp mẫu: Phương pháp mẫu là cách thức chúng ta phân tích dữ liệu trên mẫu rồi rút ra kết luận cho tổng thể.

1.2. Phân loại mẫu

1.2.1. Mẫu định tính: là mẫu mà ta chỉ quan tâm xem các phần tử trong mẫu có tính chất T nào đó hay không. Khi đó mẫu được cho ở dạng:

- Kích thước mẫu: n
- Số phần tử có tính chất T của mẫu: k (còn gọi là tần số mẫu).

1.2.2. Mẫu định lượng (gắn với một ĐLNN X): là mẫu mà ta cần quan tâm xem xét đến các giá trị mà ĐLNN X có thể nhận trên từng phần tử trong mẫu. Khi đó mẫu được cho ở dạng :

- Kích thước mẫu: n
- Giá trị của các phần tử: $x_1, x_2, ..., x_n$

Nếu mẫu có các phần tử có giá trị giống nhau thì thường được cho ở dạng bảng phân phối tần số mẫu như sau:

X	x_1	x_2 …	x_m
Tần số	n_1	n_2 …	n_m

Ở đây, n_i là số phần tử của mẫu mà X nhận giá trị x_i. Nếu n_i là số phần tử của mẫu nhận giá trị trong khoảng (a_i , b_i) thì ta xem chúng nhận giá trị chung là $x_i = \frac{a_i+b_i}{2}$

1.3. Các đặc trưng của mẫu

1.3.1. Đặc trưng của mẫu định tính

- Tần suất mẫu (hay là tỷ lệ mẫu): $\boxed{f = \frac{k}{n}}$

Ví dụ 1. Trước kỳ bầu cử, người ta phỏng vấn 1575 cử tri thì thấy có 1212 người trả lời là ủng hộ ứng cử viên X. Tìm tỷ lệ mẫu ủng hộ ứng cử viên X.

Ví dụ 2.Người ta bắt được 1200 con cá, đánh dấu rồi thả lại vào hồ nước. Sau một thời gian bắt lại 250 con thì thấy có 32 con bị đánh dấu. Hãy tìm tỷ lệ mẫu bị đánh dấu.

1.3.2. Các đặc trưng của mẫu định lượng

Cho mẫu định lượng dưới dạng thu gọn

X (x_i)	x_1	x_2	……	x_k
Tần số(n_i)	n_1	n_2	……	n_k

Ta có các đặc trưng mẫu như sau

- Trung bình mẫu $\boxed{\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i}$.
- Phương sai mẫu

$$\boxed{\sigma_n^2 = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i\right)^2}$$

- Độ lệch chuẩn mẫu $\boxed{\sigma_n = \sqrt{\sigma_n{}^2}}$
- Phương sai mẫu hiệu chỉnh $\boxed{S^2 = \sigma_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_n^2}$
- Độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh $\boxed{S = Sx = x\sigma_{n-1} = \sigma_{n-1} = \sqrt{\sigma_{n-1}^2}}$

CÁCH BẤM MÁY THỐNG KÊ

A. Dùng CASIO fx-570MS

- **Khởi động chương trình thống kê**

  Nhấn MODE MODE 1 Trên màn hình phía trên hiển thị chữ SD

- **Xóa dữ liệu thống kê cũ** SHIFT CLR 1 =

- **Nạp dữ liệu**
  Nhấn làn lượt x_1 SHIFT ; n_1 DATA , … cho đến khi hết dữ liệu
  Phía dưới bên phải màn hình hiện thị kích thước mẫu n = …

- **Gọi kết quả**

  - **Kích thước mẫu (n)**

  SHIFT 1 (S-SUM) 3 = (Kết quả hiển thị phía dưới bên phải màn hình)

  - **Trung bình mẫu ($\bar{x}$)**

  SHIFT 2 (S-VAR) 1 = (Kết quả hiển thị phía dưới bên phải màn hình)

  - **Độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh (σ_{n-1})**

  SHIFT 2 (S-VAR) 3 = (Kết quả hiển thị phía dưới bên phải màn hình)

B. Dùng máy tính **CASIO fx-570ES**

- **Khởi động chương trình**

Lần lượt nhấn

- SHIFT MODE Mũi tên đi xuống trên phím "REPLAY"
- Chọn 4: STAT. Trên màn hình hiển thị chữ: "Frequency?"

- Chọn 1: on
- MODE
- Chọn 3: STAT.
- Chọn 1: 1 – VAR. Trên màn hình hiển thị hai cột: X và FREQ.

- **Nhập dữ liệu**
  - Ở cột "X": nhập các giá trị đại diện của mẫu, cách nhau bởi dấu "bằng"
  - Ở cột "FREQ": nhập tần số tương ứng với từng giá trị, cách nhau bởi dấu "bằng"
  - Sau khi nhập xong tất cả các cột, nhấn phím "AC".

- **Gọi kết quả**

Kích thước mẫu: Lần lượt nhấn
- SHIFT Số 1
- Chọn 5: Var
- Chọn 1: n
- Nhấn "dấu bằng" và đọc kết quả ở góc dưới bên phải của màn hình.

Trung bình mẫu: Nhấn lần lượt
- SHIFT Số 1
- Chọn 5: Var
- Chọn 2: $\bar{x}$
- Nhấn "dấu bằng" và đọc kết quả ở góc dưới bên phải của màn hình.

Độ lệch mẫu hiệu chỉnh: Nhấn lần lượt
- SHIFT Số 1
- Chọn 5: Var
- Chọn 4: $x\sigma_{n-1}$
- Nhấn "dấu bằng" và đọc kết quả ở góc dưới bên phải của màn hình.

Ví dụ 3. Để nghiên cứu nhu cầu mua gạo ở một thành phố, người ta tiến hành điều tra một số gia đình và ghi kết quả ở bảng sau đây.

Nhu cầu (kg/tháng)	Số gia đình	Nhu cầu	Số gia đình
30 – 35	45	55 – 60	182
35 – 40	68	60 – 65	151
40 – 45	103	65 – 70	115
45 – 50	179	70 – 75	94
50 - 55	208	75 - 80	55

a) Hãy tính các đặc trưng mẫu.
b) Tính tỉ lệ mẫu có nhu cầu trên 60 kg/tháng.

2. LÝ THUYẾT ƯỚC LƯỢNG VÀ KIỂM ĐỊNH THỐNG KÊ

2.1. Lý thuyết ước lượng thống kê

2.1.1. Ta chỉ xét ước lượng khoảng hai phía đối xứng cho tỉ lệ và trung bình của tổng thể khi kích thước mẫu n≥30, phương sai tổng thể chưa biết.

ƯỚC LƯỢNG KHOẢNG ĐỐI XỨNG
CHO TỈ LỆ HAY TRUNG BÌNH TỔNG THỂ

ƯỚC LƯỢNG TỶ LỆ		ƯỚC LƯỢNG GTTB (KỲ VỌNG)
Nội dung bài toán		
Cần nghiên cứu tỷ lệ p của các phần tử có 1 tính chất xác định nào đó trên toàn bộ tổng thể. Căn cứ vào một mẫu định tính có kích thước n $(n \geq 30)$ hãy đưa ra một khoảng ước lượng $p \in (p_1, p_2)$ với độ tin cậy $1-\alpha$ đã ấn định trước.		Cần nghiên cứu giá trị trung bình (kỳ vọng) $a =$ E(X) của một ĐLNN X trên toàn bộ tổng thể. Căn cứ vào một mẫu định lượng kích thước n $(n \geq 30)$ hãy đưa ra một khoảng ước lượng $a \in (a_1, a_2)$ với độ tin cậy $1-\alpha$ đã ấn định trước.
Thuật toán giải		
Tỷ lệ mẫu $\boxed{f = \frac{k}{n}(\%)}$ Trong đó, k là tần số mẫu.	**Bước 1:** Tính (các) đặc trưng mẫu	TB mẫu $\overline{X}$ Độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh S
	Bước 2: Tra bảng Laplace, tìm số $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ sao cho $\varphi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1-\alpha}{2}$	
$\varepsilon = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$	**Bước 3:** Tính độ chính xác (sai số) ε	$\varepsilon = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$
$p \in (p_1, p_2)$ với độ tin cậy $1-\alpha$, ở đây $p_1 = f - \varepsilon, p_2 = f + \varepsilon$	**Bước 4:** Đưa ra khoảng ước lượng và kết luận bài toán.	$a \in (a_1, a_2)$ với độ tin cậy $1-\alpha$, ở đây $a_1 = \overline{X} - \varepsilon, a_2 = \overline{X} + \varepsilon$

Chú ý: Các dạng bài toán

- *Biết độ tin cậy $1 - \alpha$ và độ chính xác ε, tìm kích thước mẫu tối thiểu.*
- *Biết độ chính xác ε và kích thước mẫu, tìm độ tin cậy $1 - \alpha$.*

2.1.2. Ví dụ 4: Kiểm tra ngẫu nhiên 500 sản phẩm của một nhà máy thì thấy có 360 sản phẩm loại một. Hãy ước lượng tỉ lệ sản phẩm loại một của cả nhà máy với độ tin cậy 95%.

2.1.3. Ví dụ 5: Tại một khu rừng nguyên sinh, người ta đeo vòng vào chân của 1200 con chim. Sau một thời gian bắt lại 250 con thì thấy 40 con có đeo vòng. Hãy ước lượng số chim trong khu rừng đó với độ tin cậy 99%.

2.1.4. Ví dụ 6: Điều tra về thu nhập của một số công nhân trong một xí nghiệp ta được bảng số liệu sau đây:

Thu nhập (triệu đồng/tháng)	Số công nhân
5	15
6	20
7	35
8	15
9	10
10	5

a) Hãy ước lượng thu nhập trung bình của công nhân toàn xí nghiệp với độ tin cậy 99%.

b) Những người có thu nhập trên 7 triệu đồng/tháng là người có thu nhập khá. Hãy ước lượng tỉ lệ công nhân có thu nhập khá trong xí nghiệp với độ tin cậy 95%. Nếu xí nghiệp có 1800 công nhân thì số công nhân có thu nhập khá tối thiểu của xí nghiệp là bao nhiêu?

2.2. Lý thuyết kiểm định thống kê

2.2.1. Ta sẽ xét kiểm định một tham số đối xứng hai phía hoặc một phía của (một) tổng thể và kiểm định so sánh hai tham số của hai tổng thể.

KIỂM ĐỊNH MỘT THAM SỐ HAI PHÍA
CHO TỈ LỆ HAY TRUNG BÌNH TỔNG THỂ

KIỂM ĐỊNH TỶ LỆ	KIỂM ĐỊNH GTTB (KỲ VỌNG)
Nội dung bài toán	
Bằng một cách nào đó, ta được biết rằng tỷ lệ p của các phần tử của toàn bộ tổng thể có một tính chất xác định nào đó là $p = p_0$. Hiện tại, ta nghi ngờ rằng p đã thay đổi. Đặt giả thuyết $H: p = p_0$, đối thuyết $\overline{H}: p \neq p_0$. Căn cứ vào một mẫu định tính kích thước n $(n \geq 30)$ hãy kiểm định để chấp nhận H hay bác bỏ H với mức ý nghĩa α đã ấn định trước.	Bằng một cách nào đó, ta đã biết rằng kỳ vọng của ĐLNN X trên toàn bộ là $a = a_0$. Hiện tại, ta nghi ngờ rằng a đã thay đổi. Đặt giả thuyết $H: a = a_0$, đối thuyết $\overline{H}: a \neq a_0$. Căn cứ vào một mẫu định lượng kích thước n $(n \geq 30)$ hãy kiểm định để chấp nhận H hay bác bỏ H với mức ý nghĩa α đã ấn định trước.

Thuật toán giải

Tỷ lệ mẫu f	**Bước 1** Tính (các) đặc trưng mẫu	- TB mẫu $\overline{X}$ - Độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh S = σ_{n-1}
	Bước 2: Tra bảng Laplace, tìm số $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ sao cho $\varphi\left(Z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = \frac{1-\alpha}{2}$	
$Z_0 = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}$	**Bước 3:** Tính giá trị tiêu chuẩn của kiểm định	$Z_0 = \frac{(\overline{X} - a_0)\sqrt{n}}{S}$
	Bước 4: So sánh và kết luận kiểm định với mức ý nghĩa α. - Nếu $\lvert Z_0 \rvert \leq Z_{\frac{\alpha}{2}}$ thì chấp nhận H. - Nếu $\lvert Z_0 \rvert > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ thì bác bỏ H	

KIỂM ĐỊNH MỘT THAM SỐ MỘT PHÍA CHO TỈ LỆ HAY TRUNG BÌNH TỔNG THỂ

KIỂM ĐỊNH TỶ LỆ	KIỂM ĐỊNH GTTB (KỲ VỌNG)
Nội dung bài toán	
Bằng một cách nào đó, ta đã biết rằng tỷ lệ p các phần tử của toàn bộ tổng thể có một tính chất xác định nào đó là $p = p_0$. Hiện tại, ta nghi ngờ rằng p đã thay đổi. Đặt giả thuyết $H: p = p_0$, đối thuyết $\overline{H}: p > p_0$ (hay $\overline{H}: p < p_0$). Căn cứ vào một mẫu định tính kích thước n $(n \geq 30)$ hãy kiểm định để chấp nhận H hay bác bỏ H với mức ý nghĩa α đã ấn định trước.	Bằng một cách nào đó, ta đã biết rằng kỳ vọng của ĐLNN X trên toàn bộ tổng thể là $a = a_0$. Hiện tại, ta nghi ngờ rằng a đã thay đổi. Đặt giả thuyết $H: a = a_0$, đối thuyết $\overline{H}: a > a_0$ (hay $\overline{H}: a < a_0$). Căn cứ vào một mẫu định lượng kích thước n $(n \geq 30)$ hãy kiểm định để chấp nhận H hay bác bỏ H với mức ý nghĩa α đã ấn định trước.

Thuật toán giải

Tỷ lệ mẫu f	**Bước 1** Tính (các) đặc trưng mẫu	-TB mẫu $\overline{X}$ -Độ lệch chuẩn mẫu hiệu chỉnh S = σ_{n-1}
	Bước 2: Tra bảng Laplace, tìm số Z_α sao cho $\varphi(Z_\alpha) = \frac{1}{2} - \alpha$	
$Z_0 = \frac{(f - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1 - p_0)}}$	**Bước 3:** Tính giá trị tiêu chuẩn của kiểm định	$Z_0 = \frac{(\overline{X} - a_0)\sqrt{n}}{S}$
	Bước 4: So sánh và kết luận kiểm định với mức ý nghĩa α. -Khi $\overline{H}$: ">", nếu $Z_0 > Z_\alpha$ thì bác bỏ H, ngược lại chấp nhận H. -Khi $\overline{H}$: "<", nếu $Z_0 < -Z_\alpha$ thì bác bỏ H, ngược lại chấp nhận H.	

BÀI TẬP

1. Đo đường kính của một số chi tiết do một máy sản xuất, ta có bảng số liệu sau:

Đường kính (mm)	Số chi tiết
19,80 – 19,85	3
19,85 – 19,90	5
19,90 – 19,95	16
19,95 – 20,00	28
20,00 – 20,05	23
20,05 – 20,10	14
20,10 – 20,15	7
20,15 – 20,20	4

a) Hãy ước lượng đường kính trung bình của các chi tiết do máy đó sản xuất với độ tin cậy 95%.

b) Hãy ước lượng tỉ lệ chi tiết đạt tiêu chuẩn với độ tin cậy 99%, biết rằng những chi tiết đạt tiêu chuẩn phải có đường kính từ 19,9 mm đến 20,1 mm.

2. Muốn biết số cá có trong một hồ lớn, người ta bắt lên 2000 con, đánh dấu xong lại thả chúng xuống hồ. Sau đó người ta bắt lên 400 con thì thấy có 55 con bị đánh dấu. Với độ tin cậy 95% hãy ước lượng số cá trong hồ. Cho biết mỗi con cá có khối lượng trung bình 800 gam và mỗi kilôgam cá bán được 22000đ. Ước lượng doanh thu khi bán hết số cá trong hồ với độ tin cậy 95%.

3.Theo một số liệu điều tra vài năm trước, tỉ lệ người mắc bệnh tai mũi họng ở một thành phố là 6%. Hiện tại, do sự ô nhiễm ngày càng gia tăng, người ta dự đoán rằng tỉ lệ đó đã thay đổi. Kiểm tra sức khoẻ ngẫu nhiên 300 người thì thấy có 24 người mắc bệnh tai mũi họng. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$ có cơ sở để cho rằng tỉ lệ người mắc bệnh tai mũi họng có xu hướng tăng lên không?

4. Khi điều trị bằng thuốc A, tỉ lệ bệnh nhân khỏi bệnh là 80%. Đổi sang thuốc B để điều trị cho 1110 người thì thấy có 920 người khỏi bệnh. Với mức ý nghĩa $\alpha = 0,01$ có thể cho rằng thuốc B hiệu quả hơn thuốc A hay không?

5. Theo phương pháp nuôi thứ nhất, tỉ lệ gà bị bệnh trong đàn gà là 0,06. Theo phương pháp nuôi thứ hai, kiểm tra thấy có 5 con bị bệnh trong đàn gà 100 con. Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$ có thể kết luận rằng tỉ lệ gà bị bệnh khi nuôi theo phương pháp thứ hai thấp hơn không?

6. Khối lượng của một loại sản phẩm do một nhà máy sản xuất là đại lượng ngẫu nhiên có phân phối chuẩn với khối lượng trung bình quy định là 500 gam. Nghi ngờ khối lượng của loại sản phẩm này có xu hướng giảm sút, người ta đã cân thử một số sản phẩm và thu được kết quả ghi ở bảng sau.

Khối lượng (g)	480	485	490	495	500	505	510
Số sản phẩm	2	3	8	5	3	10	4

Với mức ý nghĩa $\alpha = 5\%$, hãy kết luận về điều nghi ngờ đó.